

(ii) ليكن (D) مستقيم موجه ب $\vec{u}(a,b,c)$ و (P) مستوى بحيث تكون $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ منظمية عليه.

(* يكون $(D) \perp (P)$ إذا فقط إذا كانت \vec{u} و \vec{n} مستقيمتين.

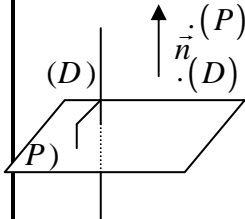
$$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & \beta \\ c & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \text{يعني}$$

(* يكون $(D) \parallel (P)$ إذا فقط إذا كانت $\vec{u} \perp \vec{n}$ يعني $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

(iii) إذا كان المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) فإن:

(* كل متجهة موجهة ل (D) تكون منظمية على (P) و \vec{n} .

(* وكل متجهة منظمية على (P) تكون موجهة ل (D) و \vec{n} .



(f) تعامد مستويين:

(i) ليكن (Q) و (P) مستويين و \vec{n} و \vec{n}' منظمتين عليهما على التوالي.

(* يكون $(P) \perp (Q)$ إذا فقط إذا كان $\vec{n} \perp \vec{n}'$ يعني $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

(* يكون $(P) \parallel (Q)$ إذا فقط إذا كان \vec{n} و \vec{n}' مستقيمتين.

(ii) نعتبر المستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$$\text{و } (Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

يكون $(P) \perp (Q)$ إذا فقط إذا $aa'+bb'+cc'=0$

(g) مسافة نقطة عن مستوى:

(i) ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء

و H المسقط العمودي ل A على (P)

المسافة AH تسمى مسافة A عن (P)

ونكتب $d(A, (P)) = AH$

(ii) نعتبر المستوى $(P): ax+by+cz+d=0$

و النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{لدينا}$$

(II) الفلكة.

(1) الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة النقط M التي تحقق $\Omega M = r$.

(2) معادلة الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها r هي:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

نقوم بالنشر ونجعل المعادلة على شكل:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

I - الجداء السلمي.

نفترض في كل ما يلي أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد منظم $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

(2) نعتبر النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

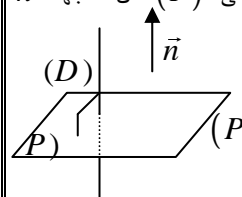
لدينا $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

(3) المستقيمت والمستويات في الفضاء الإقليدي.

(a) ليكن (P) مستوى. نسمي متجهة منظمية على (P) كل متجهة \vec{n}

موجهة لمستقيم (D) عمودي على (P) .



(b) نعتبر المستوى $(P): ax+by+cz+d=0$

المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P) .

(c) معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1, -1, 2)$

و المتجهة $\vec{n}(2, 1, -1)$ منظمية عليه:

الطريقة 1: $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + (y+1) - (z-2) = 0$$

إذن: $(P): 2x + y - z + 1 = 0$

الطريقة 2: لدينا $\vec{n}(2, 1, -1)$ منظمية على (P) إذن معادلة (P) على

شكل $2x + y - z + 1 = 0$ ولدينا $A(1, -1, 2) \in (P)$ إذن

$d = 1$ يعني $2 - 1 - 2 + d = 0$ إذن $(P): 2x + y - z + 1 = 0$.

(d) تعامد مستقيمتين.

ليكن (D') و (D) مستقيمتين موجهين ب $\vec{u}(a,b,c)$ و

$\vec{v}(a', b', c')$ على التوالي:

يكون $(D) \perp (D')$ إذا فقط إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ يعني $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

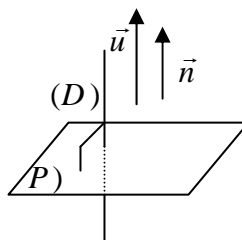
$aa' + bb' + cc' = 0$

(e) تعامد مستقيم ومستوى.

(i) ليكن (D) مستقيم موجه ب \vec{u} و (P) مستوى موجه ب \vec{v} و \vec{w} .

يكون $(D) \perp (P)$ إذا فقط إذا كان

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \end{cases}$$



$$(\Gamma): x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان.

الطريقة 1: نضع $d = \delta$ $c = \frac{-\gamma}{2}$ $b = \frac{-\beta}{2}$ $a = \frac{-\alpha}{2}$ ونحسب

$$a^2 + b^2 + c^2 - d$$

(* إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ فإن $\Gamma = \emptyset$

(* إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ فإن $\Gamma = \{\Omega(a, b, c)\}$

(* إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ فإن فلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$

وشعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

الطريقة 2: نقوم بتحويل المعادلة لئرجعها على شكل

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2 + \alpha X = \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

(* إذا كان $k < 0$ فإن $(\Gamma) = \emptyset$

(* إذا كان $k = 0$ فإن $(\Gamma) = \{\Omega(a, b, c)\}$

(* إذا كان $k > 0$ فإن $\Omega(a, b, c)$ وشعاعها $r = \sqrt{k}$

4) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لنكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (S) هناك طريقتان:

الطريقة 1

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \\ z - z_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

الطريقة 2:

نستعمل مباشرة الصيغة

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

5) تقاطع فلكة ومستوى.

(a) لنكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من أجل دراسة تقاطع (S) و (P) نقوم بحساب $d = d(\Omega, (P))$ وهناك ثلاث حالات:

(i) إذا كانت $d > r$ فإن (P) يوجد خارج (S) ((P) لا يقطع (S)).

(ii) إذا كان $d = r$ فإن (P) و (S) ينقطعان في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (P) مماس ل (S) في H ونقط التماس H هي المسقط العمودي ل Ω على (P) .

(iii) إذا كانت $d < r$ فإن المستوى (P) يقطع (S) وفق الدائرة (ℓ) الموجودة ضمن المستوى (P) التي مركزها هو H المسقط العمودي ل Ω على (P) وشعاعها $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$.

(b) إذا كانت $d(\Omega, (P)) \in (P)$ ونقول في هذه الحالة إن المستوى (P) مستوى قطري. وفي هذه الحالة المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة الكبرى (ℓ) الموجودة ضمن (P) التي مركزها Ω وشعاعها هو r .

(c) لنكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها x .

(i) يكون (P) مماس ل (S) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega, (P)) = r$.

(ii) يكون (P) مماس ل (S) في A إذا وفقط إذا كان (ΩA) عمودي على (P) في A .

(iii) المستوى المماس للفلكة (S) في A هو المستوى المار من A و $\overline{\Omega A}$ منظمية عليه.

6) تقاطع فلكة ومستقيم:

$$(D): \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

نعتبر المستقيم

والفلكة (S) التي معادلتها:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

من أجل دراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D) نقوم بحل النظمة:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t & (1) \\ y = y_0 + \beta t & (2) \\ z = z_0 + \gamma t & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها t .

ليكن Δ مميز هذه المعادلة:

(i) إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل إذن (D) لا يقطع (S) .

(ii) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا إذن (D) يقطع (S) في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (D) مماس ل (S) في H .

(iii) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين t_1 و t_2 إذن (D) يقطع (S) في نقطتين A و B وللحصول على إحداثيات A و B نعوض t_1 و t_2 في (1) و (2) و (3).

(III) الجداء المتجهي

1- ليكن $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما متعامدا منظميا مباشرا.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ونعتبر المتجهتين

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

لدينا

2) تكون المتجهتين \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

3) (a) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين موجهتين لمستوى (P) فإن $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منظمية على (P) .

(b) لنكن A, B, C ثلاث نقط غير مستقيمة (يعني $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq 0$) المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

4) مساحة المثلث (ABC) هي $S = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|$

5) مساحة المتوازي أضلاع $(ABCD)$ هي $S = \|\overline{AB} \wedge \overline{AD}\|$

6) ليكن (D) مستقيم مار من A وموجه بالمتجهة \vec{u} ولنكن M نقطة.

$$d(M, (D)) = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

لدينا

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \quad (*)$$

$$\alpha \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad (*)$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad (*)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} \quad (*)$$

8) من أجل دراسة تقاطع مستقيم (D) وفلكة (S) يمكن حساب $d(\Omega, (D))$ ثم استنتاج التقاطع.

